Université François Rabelais
Département de Physique

Année 2009/2010
L2 SM

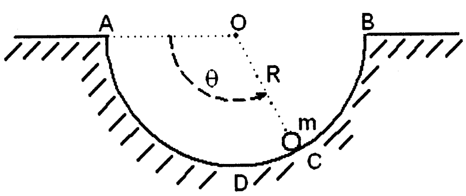
Mécanique
Samedi 28 novembre — Durée 2h

Exercice 1

Une petite boule de masse m est placée à l'instant initial au point A avec une vitesse nulle, d'où elle glisse sans frottement sur la surface sphérique ADB de rayon R (voir figure).

1. Calculer la vitesse angulaire ω de la boule au point C en fonction de sa position angulaire θ, du rayon R, et de l'accélération gravitationnelle g.

2. Trouver la force de réaction $\|\vec{R}\|$ de la surface sur la boule.



Exercice 2

On considère une particule ponctuelle de masse M se déplaçant dans le plan xOy sous l'action d'une force $\vec{F}$ dérivant de énergie potentielle :

$$U(x,y) = K\,x\,y$$

où K est une constante positive. À l'instant initial $t = 0$, la particule est au point O avec la vitesse $\vec{v}(0) = 2v_0\,\vec{i} + v_0\,\vec{j}$, où v_0 est une constante positive.

1. Calculer la force $\vec{F}$ agissant sur la particule.

2. Établir que les équations décrivant le mouvement de la particule sont données par le système d'équations différentielles couplées (que l'on ne cherchera pas à résoudre) :

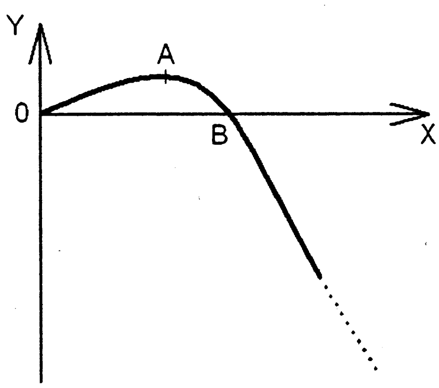
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{M}\,y \\ \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K}{M}\,x \end{cases}$$

3. On pose $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Vérifier que les équations paramétriques:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{2\omega}(3\sin\omega t + \sinh\omega t) \\ y(t) = \frac{v_0}{2\omega}(3\sin\omega t - \sinh\omega t) \end{cases}$$

sont compatibles avec les conditions initiales — c'est-à-dire la position et la vitesse de la particule à $t = 0$.
Vérifier que ces équations paramétriques sont également solutions du système précédent d'équations différentielles couplées.

4. La trajectoire de la particule dans le plan xOy est représentée sur la figure ci-dessous.



   - Déterminer les coordonnées (x_A, y_A) du point A en fonction du rapport $\frac{v_0}{\omega}$.
   - Déterminer, en fonction de ω, à quel temps τ la particule coupe en B l'axe Ox.

5. Calculer le travail W développé par $\vec{F}$ lorsque la particule passe du point O au point B

Formulaire

L'équation:

$$3\cos\alpha - \cosh\alpha = 0$$

a deux racines réelles, $\alpha \simeq \pm 1.02085$.

L'équation:

$$3\sin\beta - \sinh\beta = 0$$

a trois racines réelles, $\beta = 0$ et $\beta \simeq \pm 1.79453$.

On donne :

$$\sin(1.02085) \simeq 0.85$$
$$\sinh(1.02085) \simeq 1.20$$